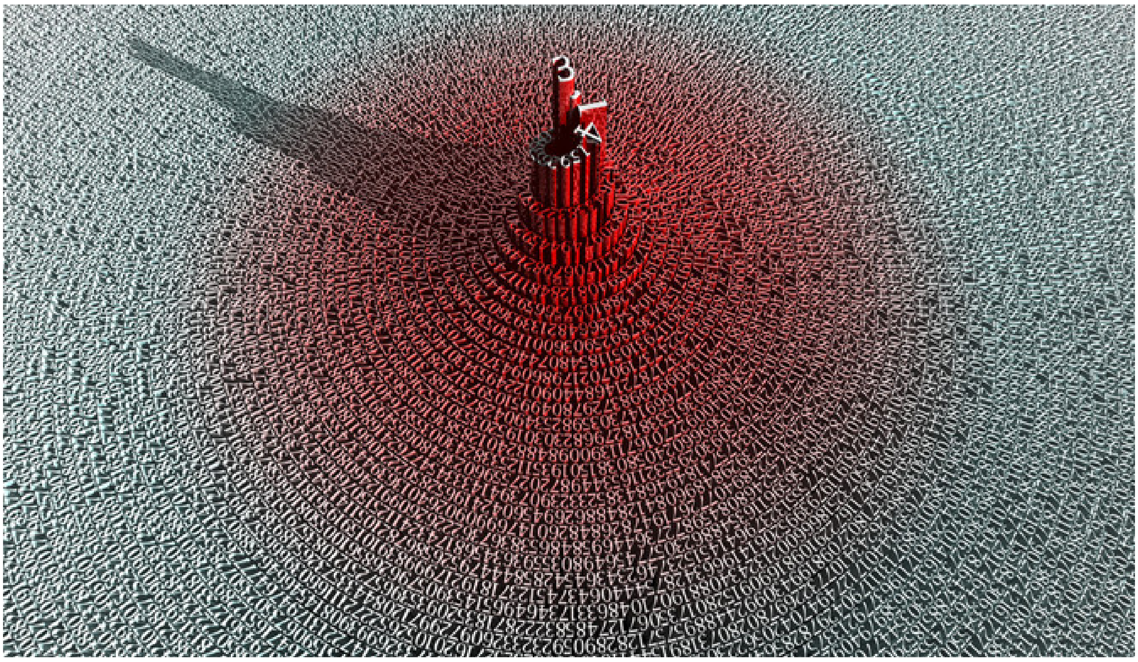
Matemáticas I



Cuadernillo de repaso

TEMA 1: NÚMEROS REALES

- **Clasificación y representación de números reales**

EJERCICIO 1 : Clasificar y representar los siguientes números: -2; 3; -4/5; 4/2; $-\sqrt{25}$; $-\sqrt{26}$; $4{,}3\overline{1}$; 1,01001….; $\sqrt[3]{-125}$; π - 2

EJERCICIO 2 :Clasifica y representa los siguientes números: -7/3;-$\sqrt[3]{27}$;2,34; $\sqrt{6}$; -2,34….; $\sqrt{21}$; 5/4

- **Operar con números decimales. Paso a fracción**

EJERCICIO 3 : Calcula : $1{,}4\hat{2} - 3{,}\hat{4} + 2{,}7$

- **Intervalos y semirrectas. Valores absolutos**

EJERCICIO 4 : Cambiar de notación (tipo de intervalo, significado, representación...) los siguientes intervalos y semirrectas:

a) [3,5)

b) 

c) "Números menores que 7"

d) $\{x \in R \,/\, x \geq 2\}$

e) E(2,5)

f) E*(2,5)

g) $E^{+}(2,5)$

h) $E^{-}(2,5)$

EJERCICIO 5 : Expresa de todas las formas posibles los siguientes intervalos y semirrectas:

a) $| x - 3 | \leq 4$

b) $| x + 2 | > 3$

- **Radicales. Propiedades y operaciones. Racionalizar**

EJERCICIO 6 : Realizar las siguientes operaciones con radicales:

a) $5\sqrt[4]{2} + 7\sqrt[4]{3} - 6\sqrt[4]{32} + 13\sqrt[4]{64} - \sqrt[4]{1875}$

b) $\sqrt{\frac{x^2y^3}{z}} : \sqrt[3]{\frac{x^6y}{z^2}}$

c) $\sqrt{14 + \sqrt{7 - \sqrt[4]{81}}}$

d) $\sqrt[3]{5\sqrt[4]{5\sqrt[5]{5^2}}}$

e) $\left(\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\sqrt{3}$

f) $\left(2 + \sqrt{2}\right)^2 - \left(2 + \sqrt{2}\right)\left(2 - \sqrt{2}\right)$

g) $\frac{2}{5\sqrt[3]{2}}$

h) $\frac{3\sqrt{5} - 4}{\sqrt{5} - 2}$

i) $2.\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{27} + \frac{1}{4}\sqrt{12} - 3\sqrt{\frac{75}{9}}$

j) $\sqrt[3]{a^{-2}}.\sqrt[6]{a^4}.\sqrt[4]{a^{-3}}.\sqrt[5]{a^3}$

k) $7\sqrt{150} - 3\sqrt{18} + \sqrt{24} - 5\sqrt{8} - \sqrt{6}$

l) $\frac{5\sqrt{a^3b^4}\sqrt[6]{a^2b^3c^3}}{\sqrt[3]{a}}$

m) $\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt[5]{4}}$

n) $\frac{5}{2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)}$

ñ) $\sqrt{\frac{15}{135}}.\sqrt[3]{\frac{12}{10}}$

o) $\sqrt{147} - 2\sqrt[3]{81}$

p) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 1}$

q) $\frac{\sqrt{\frac{8x^2y}{z}} : \sqrt[3]{\frac{16xy^2}{z}}}{\sqrt{\frac{16xy^2}{z}}.\sqrt[3]{\frac{8x^2y}{z}}}.\sqrt[6]{\frac{2y}{x}}$

r) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$

s) $-\frac{7}{3}\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{375} - \left(\sqrt[3]{81} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{192}\right)$

t) $\frac{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^4.\left(a^2\sqrt{a}\right)^3}{\sqrt[6]{a^5}}$

u) $\sqrt{75} - \frac{\sqrt{18}}{3} + \frac{3\sqrt{12}}{4} - \sqrt{\frac{2}{25}}$

v) $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 3}$

w) $3\sqrt[3]{81ab^6} + 5\sqrt[3]{3a^4b^3} - 11\sqrt[3]{24a^7}$

x) $\sqrt[5]{\frac{x^2y^3}{z}} : \sqrt{\frac{xy}{z}}$

y) $\frac{10}{\sqrt[5]{128}}$

z) $\frac{3}{2\sqrt[5]{27}}$

1) $\sqrt[3]{a^6\sqrt{\frac{a^{12}}{a^{30}}}}$

2) $\frac{-4}{\sqrt[4]{3}.\sqrt[3]{2}}$

3) $\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}.\left(\sqrt{125} + 2\right)}$

- **Logaritmos. Propiedades y operaciones.**

EJERCICIO 7 : Resolver las siguientes ecuaciones:
a) $\log_3 x = 2$ b) $\log_{1/2} 32 = x$ c) $\log_5 45 = x$ d) $2.\log(x+3) + \log 2 = \log(3x^2 + 5)$

EJERCICIO 8 : Sabiendo que $\log 2 = 0{,}30103...$ halla:
a) $\log 0{,}25$ b) $\log 512$ c) $\log \sqrt[3]{0{,}02}$ d) $\log \left(1/\sqrt[3]{16}\right)$

EJERCICIO 9 : Utiliza las propiedades de los logaritmos para calcular el valor de las siguientes expresiones, teniendo en cuenta que $\log k = 1{,}2$: a) $\log \frac{\sqrt[4]{k}}{1000}$ b) $\log(100.k^3)$

EJERCICIO 10 : Expresa como un solo logaritmo la siguiente expresión, utilizando las propiedades de los logaritmos: $3\log 2 + \log 5 + \log \frac{1}{25} - \log 4$

EJERCICIO 11 : Sabiendo que $\log x = 0{,}85$, calcular $\log(100x) - \log \frac{\sqrt[3]{x}}{1000}$

EJERCICIO 12 : Hallar el valor de la siguiente expresión: $\log_4 16 + \log_2 \sqrt{32} - \log_5 1 + \log_2 3$

EJERCICIO 13 : Sabiendo que $\log x = 2$, $\log y = 3$, $\log z = -1$, calcular $\log \frac{x^3.3y}{\sqrt{z}}$

EJERCICIO 14 : Si sabemos que $\log x = 0{,}9$, calcula: $\log \frac{x^3}{100} - \log\left(100\sqrt{x}\right)$

TEMA 2: ÁLGEBRA

- **Factorización de polinomios**

EJERCICIO 1 : Calcular las raíces de
a) $x^3 + 6x^2 - x - 6$ b) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ c) $x^4 - 5x^2 + 4$ d) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$

EJERCICIO 2 : Descomponer en factores los polinomios:
a) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$ b) $x^4 + 4x^3 + 4x^2$ c) $x^4 - 5x^2 + 4$
d) $x^3 + 2x^2 + 4x$ e) $2x^3 + 11x^2 + 2x - 15$ f) $3x^4 - 3x^3 - 18x^2$
g) $4x^2 + 12x + 9$ h) $25x^2 - 4$

EJERCICIO 3 : Hallar el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes polinomios:
$P(x) = x^4 + 7x^3 + 12x$ $Q(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3$

- **Teorema del resto**

EJERCICIO 4 : Hallar m para que $5x^3 - 12x^2 + 4x + m$ sea divisible por $x - 2$

EJERCICIO 5 : Calcular a para que el polinomio $x^3 + ax + 10$ sea divisible por $x + 5$

EJERCICIO 6 : Dado el polinomio $x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 5x + m$, determinar m para que al dividirlo por $x + 3$ se obtenga 100 como resto.

- **Fracciones algebraicas**

EJERCICIO 7 : Simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x+3}{x^2-1}\cdot\dfrac{x-1}{x+2}$ b) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-1}:\dfrac{x+2}{x+1}$ c) $\dfrac{x^3-3x+2}{x^3+x^2-2x}$ d) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+2x^2-x-2}$

e) $\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3+5x^2+8x+4}$ f) $\dfrac{x^3-7x^2+15x-9}{x^3-5x^2+3x+9}$ g) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-1}\cdot\dfrac{x+1}{x+3}$

h) $\dfrac{x^2+10x+25}{x^2-4}\cdot\dfrac{x+2}{x+5}$ i) $\dfrac{x^2-4}{x+6}:\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-36}$ j) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x+1}\right):\left(\dfrac{x^2+2}{x^2}+\dfrac{3}{x}\right)$

EJERCICIO 8 : Calcula y simplifica:

a) $\dfrac{x}{x^2-4x+3}-\dfrac{3}{x^2-5x+6}$ b) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1+x}{x^2+2x+1}$ c) $\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}+\dfrac{x-2}{x^2-4x+3}$

d) $\dfrac{x-3}{x^2+x+1}-\dfrac{3x^2}{x^3-1}$ e) $\dfrac{2}{x^2-2x+1}+\dfrac{x+1}{x^2-1}$ f) $\dfrac{1}{x^2-9x+20}-\dfrac{11}{x^2-11x+30}$

g) $\dfrac{1-x}{x^2-4x+3}-\dfrac{1+2x}{x^2-6x+9}-\dfrac{x+1}{x^2-9}$ h) $\dfrac{1+2x}{x^2+3x+2}-\dfrac{1-x}{x^2+5x+6}-\dfrac{1+x}{x^2+4x+3}$

- **Resolución de ecuaciones**

EJERCICIO 9 : Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{x^2}{2}-4x=3+\dfrac{x^2-12}{4}$ b) $x^4-4x^2+3=0$ c) $\dfrac{2x+1}{x+3}+\dfrac{x-3}{x}=\dfrac{1}{2}$

d) $x^4+2x^2-3=0$ e) $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x-1}=6$ f) $-x.(x-1).(x^2-2)=0$

g) $\dfrac{2x^3-x^2-2x+25}{x^2-1}=2x$ h) $2x^4+4x^3-18x^2-36x=0$ i) $\dfrac{x^2-16}{3}-x=\dfrac{2-3x}{3}-\dfrac{x^2}{3}$

j) $x^4-5x^2-36=0$ k) $\sqrt{3x-3}+x=7$ l) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{5}{4}$

m) $x+\sqrt{3x+10}=6$ n) $x^4-5x^2+4=0$ ñ) $\sqrt{x^2+3x}=\sqrt{2x}$

o) $\dfrac{x+1}{x-1}-1=\dfrac{1}{x}$ p) $\sqrt{2x+8}-\sqrt{x}=2$ q) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}=1+\dfrac{4}{x^2}$

r) $3^{x+2}+3^x=90$ s) $4^x-7.2^x-8=0$ t) $7^{x-1}-2^x=0$

u) $4^x-2^{x-1}-14=0$ v) $\log(2x)-\log(x+1)=\log 4$ w) $3^x+\dfrac{1}{3^x}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{79}{9}$

x) $\log(3x-1)=\log 2+\log(4x-6)$ y) $\dfrac{2^{4x-1}}{2^{3x+2}}=16$ z) $2\log x+\log 4=-2$

1) $2^{2x}-2^{x+1}+\dfrac{3}{4}=0$ 2) $\log(x-2)+\log(x-3)=\log 6$ 3) $\log(2x+3)-\log x=1$

- **Sistemas de ecuaciones**

EJERCICIO 10 : Resuelve analíticamente los siguientes sistemas de ecuaciones e interpreta gráficamente la solución:

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y=x^2+4x+2 \\ x+y+2=0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y=x^2+4x+2 \\ 4x-y+2=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y=x^2+4x+2 \\ x-y-2=0 \end{cases}$

EJERCICIO 11 : Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\left.\begin{matrix} 2x^2-y=4 \\ 4x+3y=-2 \end{matrix}\right\}$ b) $\left.\begin{matrix} x+y=2 \\ 3x-3y=-4 \end{matrix}\right\}$ c) $\left.\begin{matrix} x+2y=0 \\ x^2+y^2=5 \end{matrix}\right\}$

d) $\left.\begin{matrix} 2^x+3^y=11 \\ 2^{x+1}-3^{y-1}=5 \end{matrix}\right\}$ e) $\left.\begin{matrix} 2\log x+\log y=2 \\ \log xy=1 \end{matrix}\right\}$ f) $\left.\begin{matrix} x+2y=\dfrac{3}{x} \\ x+y=\dfrac{2}{y} \end{matrix}\right\}$

g) $\left.\begin{matrix} 5^x=25.5^y \\ \log(x+y)-\log(x-y)=\log 2 \end{matrix}\right\}$ h) $\left.\begin{matrix} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4}=1 \\ 3x-y=8 \end{matrix}\right\}$ i) $\left.\begin{matrix} 2x-1=y \\ \dfrac{x-1}{2}=y^2-1 \end{matrix}\right\}$

j) $\left.\begin{matrix} 4.2^x=4^{y+1} \\ \log(x+y)+\log(x-y)=\log 3 \end{matrix}\right\}$ k) $\left.\begin{matrix} 2x+y=52 \\ \sqrt{x}+y=7 \end{matrix}\right\}$ l) $\left.\begin{matrix} \sqrt{x}+\sqrt{y}=20 \\ 3x-y=122 \end{matrix}\right\}$

- **Método de Gauss para sistemas lineales**

EJERCICIO 12 : Resuelve, aplicando el método de Gauss, los siguientes sistemas lineales:

a) $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+2z=5 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 2x+5y+z=-3 \\ 4x+9y+3z=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y-3z=5 \\ 2x-3y+z=3 \\ 4x+y-5z=13 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+z=4 \\ y+z=3 \\ x+y=5 \\ x-2y-z=-2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y=2 \\ y+z=3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-y+2z=7 \\ 2x+y+5z=10 \\ x+y-4z=-9 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 3x+4y-z=3 \\ 6x-6y+2z=-16 \\ x-y+2z=-6 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+3z=6 \\ 3x+y-2z=0 \end{cases}$

- **Inecuaciones con una incógnita**

EJERCICIO 13 : Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $-2x+4\le -2$ b) $x^2+x-6\le 0$ c) $2x+1>-5$

d) $-3x+1>-5$ e) $x^2-4\le 0$ f) $2x-3<5$

g) $3x-1\le 4x$ h) $x^2-3x>-2$ i) $\frac{x-1}{3}\le 2x+1$

j) $\frac{2(x-1)}{3}>x-1$ k) $x^2-4\ge 0$ l) $3(x-1)+1\le 2(x+1)$

m) $2-3x<2(x+1)$ n) $-x^2+4x-4\le 0$ ñ) $\frac{x-2}{3-x}>0$

o) $\frac{x+3}{x^2-x}>0$ p) $\frac{x^2+2}{x-3}\le 0$ q) $\frac{x^2+x-6}{x^2-2x+1}\ge 0$

r) $x^3-4x\ge 0$ s) $x^3+3x^2-x-3<0$ t) $3x^2-6x>0$

- **Sistemas de inecuaciones con una incógnita**

EJERCICIO 14 : Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases}3x+8\le x+14\\ 2x>\frac{3}{2}x-1\end{cases}$ b) $\begin{cases}x^2-3x-4>0\\ 2x-3<0\end{cases}$ c) $\begin{cases}2x-3\left(\frac{x}{2}+1\right)\ge x-8\\ x+\frac{x}{3}-\frac{1}{2}+2>2x-\frac{5}{6}\end{cases}$ d) $\begin{cases}10-3x-x^2<0\\ 3x+5>-16\end{cases}$

- **Problemas algebraicos**

EJERCICIO 15 : Un número de tres cifras es tal que la suma de sus cifras es 9. Si el orden de las cifras se invierte, el número disminuye en 99 unidades y la cifra de las decenas es el doble de la cifra de las unidades. Hallar dicho número.

EJERCICIO 16 : El área de un trapecio isósceles es 7 m^2 y su base menor mide 2,5 m. Calcular la base mayor y la altura, sabiendo que ésta es las dos terceras partes de la base mayor.

EJERCICIO 17 : Un número de dos cifras elevado al cuadrado se diferencia del cuadrado del número que resulta al intercambiar sus cifras en 297. La cifra de las unidades es la mitad de la de las decenas. Hallar el número.

EJERCICIO 18 : El área de un triángulo isósceles es 60 m^2 y cada uno de los lados iguales mide 13 m. Hallar la base y la altura del triángulo.

EJERCICIO 19 : Dos hermanos se diferencian en cuatro años de edad. Dentro de ocho años, las edades de ambos sumarán 40 años. ¿Cuáles son sus edades actuales?

EJERCICIO 20 : De un rectángulo sabemos que su área es 192 cm^2 y sus diagonales miden 20 cm. Calcula la longitud de sus lados.

EJERCICIO 21 : Por dos bolígrafos, un lápiz y un rotulador he pagado 6 euros. Por cuatro bolígrafos y dos rotuladores ha pagado 10 euros. Y por cinco lápices y tres rotuladores he pagado 11 euros. ¿Cuál es el precio de cada artículo?

EJERCICIO 22 : Halla cuatro números enteros consecutivos que sumen 366.

EJERCICIO 23 : Halla dos números sabiendo que suman 7 y sus inversos, 7/12.

EJERCICIO 24 : Halla la medida de los lados de un rectángulo si sabemos que su perímetro es 20 cm y la diagonal $\sqrt{58}$ cm.

EJERCICIO 25 : Si aumentamos en 2 dm cada arista de un recipiente cúbico, su capacidad aumenta en 98 litros. Averigua la capacidad inicial del depósito.

EJERCICIO 26 : En un aula estudian 28 alumnos. De ellos, hay tantos alumnos con ojos verdes como alumnos con ojos azules, y el resto tiene ojos castaños. Si el número de alumnos con ojos castaños es igual que los alumnos que tienen ojos verdes y azules juntos. ¿cuántos alumnos hay con cada color de ojos?

EJERCICIO 27 : Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, siendo un total de 20 personas entre hombres, mujeres y niños. Contando a los hombres y las mujeres juntos, su número es el triple que el número de niños. Además, si hubiera ido una mujer más, su número igualaría al de los hombres. Calcula cuántos hombres, mujeres y niños han ido a la excursión.

EJERCICIO 28 : Ana se dispone a invertir 100.000 euros. En el banco le ofrecen dos productos: Fondo Tipo A, al 4 % de interés anual, y Fondo Riesgo B, al 6 % de interés anual. Invierte una parte en cada tipo de fondo y al cabo del año obtiene 4.500 euros de intereses. ¿Cuánto adquirió de cada producto?

EJERCICIO 29 : Los lados de un rectángulo se diferencian en 2 m. Si aumentáramos 2 m cada lado, el área se incrementaría en 40 m^2. Halla las dimensiones del polígono.

EJERCICIO 30 : El alquiler de una tienda de campaña cuesta 90 euros al día. Inés está preparando una excursión con sus amigos y hace la siguiente reflexión “Si fuéramos tres amigos más, tendríamos que pagar 6 euros cada uno”. ¿Cuántos amigos van de excursión?

EJERCICIO 31 : Dos vacas y tres terneros valen lo mismo que dieciséis ovejas. Una vaca y cuatro ovejas valen igual que tres terneros. Tres terneros y ocho ovejas cuestan lo mismo que cuatro vacas. Averigua el precio de cada animal.

EJERCICIO 32 : En la actualidad la edad de un padre es el triple de la de su hijo, y dentro de 15 años la edad del padre será el doble de la de su hijo. ¿Cuántos años tienen en este momento el padre y el hijo?

EJERCICIO 33 : Si Juan sube de tres en tres los escalones de una torre, tiene que dar 30 pasos menos que si los sube de dos en dos. ¿Cuántos escalones tiene la torre?

TEMA 3: TRIGONOMETRÍA

CAMBIOS DE UNIDADES

EJERCICIO 1 : Expresa en radianes las medidas de los siguientes ángulos:
a) 45º b) 120º c) 690º d) 1470º

EJERCICIO 2 : Expresa en grados los siguientes ángulos:
a) 3 rad b) 2,5 rad c) $\frac{7\pi}{2}$ rad d) $\frac{\pi}{5}$ rad

EJERCICIO 3 : Calcular $3\pi/4$ rad + 0,5 rectos + 50º 40' 3'' expresándolo en radianes.

OPERAR CON ÁNGULOS CONOCIDOS

EJERCICIO 4 : Halla, sin utilizar la calculadora, el cuadrante y las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:
a) 135º b) 450º c) 210º d) –60º

EJERCICIO 5 : Calcula, razonadamente, las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:
a) 1035º b) –3400º c) 10.000º d) 2700º

EJERCICIO 6 : Calcula los valores de las siguientes expresiones, sin calculadora:
a) 2.tag 30º + 5.tag 240º - cos 270º
b) cos 60º + sen 150º + sen 210º + cos 240º

EJERCICIO 7 : Calcular las razones trigonométricas de 120º.

EJERCICIO 8 : Sabiendo que sen 25° = 0,42, cos 25° = 0,91 y tag 25° = 0,47, halla (sin utilizar las teclas trigonométricas de la calculadora) las principales razones trigonométricas de 155° y de 205°.

EJERCICIO 9 : Calcula las principales razones trigonométricas de 130° y de 230°, sabiendo que:
$\text{sen}\,40^\circ = 0,64;\ \cos 40^\circ = 0,77;\ \text{tg}\,40^\circ = 084$

CAMBIO DE CUADRANTES

EJERCICIO 10 : Sabiendo que sec $\alpha = -4$ y $0 < \alpha < \pi$, calcular:
a) cosec $(3\pi/2 + \alpha)$ b) sen $(\pi/2 - \alpha)$ c) tag$(630º - \alpha)$

EJERCICIO 11 : Sabiendo que sen $\alpha = 2/3$ y $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$. Calcular:
a) cos $(3\pi/2 + \alpha)$ b) tag $(\pi - \alpha)$

EJERCICIO 12 : Sabiendo que cos $\alpha = -2/3$ y $\pi < \alpha < 2\pi$. Calcular, sin calculadora:
a) cos $(3\pi/2 - \alpha)$ b) tag $(\pi + \alpha)$

EJERCICIO 13 : Sabiendo que cos 53º = 0,6. Calcular:
a) cos 37º b) sen 143º c) tag 127º d) cotag 233º e) sec (-53º)

EJERCICIO 14 : Sabiendo que tag α = ½ y que $\pi < \alpha < 3\pi/2$, calcular:
a) sen $(\pi/2 + \alpha)$ b) cos $(\pi + \alpha)$ c) tag $(\pi/2 - \alpha)$ d) sec (360º - α)

EJERCICIO 15 : Sabiendo que cotag α = -2 y que $\pi < \alpha < 2\pi$, calcular:
a) $\cos(\pi/2 + \alpha)$ b) sen $(\pi + \alpha)$ c) cotag $(\pi/2 - \alpha)$

EJERCICIO 16 : Sabiendo que sen $(\pi/2 + \alpha)$ = -1/3 . Calcular sen α y cos α (α pertenece al 2º cuadrante)

EJERCICIO 17 : Hallar el valor de la expresión $\dfrac{\operatorname{sen}(\pi/2 + x) + \cos(\pi - x) + \operatorname{sen}(\pi - x)}{\cos(-x) + \operatorname{sen}(-x)}$

EJERCICIO 18 : Calcular el valor de la expresión: $\dfrac{\cot ag(\pi/2 - x).\operatorname{sen}(\pi/2 + x)}{2.\operatorname{tag}(\pi - \alpha)}$

EJERCICIO 19 : Hallar el valor de : $\dfrac{\operatorname{tag}(\pi - x).\cos(-x)}{\cot ag(\pi + x).\cos(\pi/2 - x)}$

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

EJERCICIO 20 : Sea $\Pi/2 < \alpha < 2\Pi$ tal que tg α = 3/4 calcular, sin utilizar la calculadora, el valor y el cuadrante de :
a) sen (x/2) b) tg $(x + 3\Pi/4)$

EJERCICIO 21 : Si cos x = -4/5 y $\Pi \leq x \leq 2\Pi$ Calcular, sin utilizar la calculadora, el cuadrante y el valor de cos (x/2) y sen (2x)

EJERCICIO 22 : Conociendo sen x = - 3/5 y sabiendo $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$, calcular, sin utilizar la calculadora, el valor y el cuadrante de:
a) tag (x - $\pi/4$) b) sen (x/2)

EJERCICIO 23 : Si cos α = -5/13 y $\Pi < \alpha < 2.\Pi$. Calcular, sin utilizar la calculadora, el valor y el cuadrante al que pertenecen los siguientes ángulos.
a) sen$(2.\alpha)$ b) tag $(\alpha/2)$

EJERCICIO 24 : Si x es un ángulo comprendido entre $\Pi/2$ y $3\Pi/2$ y su seno vale 3/5. Calcular, sin utilizar la calculadora, el sen (2x) y cos(x/2). Razona los signos.

EJERCICIO 25: Si sen x = -3/5 90º $\leq$ x $\leq$ 270º Calcular y razona en que cuadrante están:
a) sen (x/2) b) cos (2x)

EJERCICIO 26 : Sabiendo que $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$ y sen α = 1/3
a) Hallar el cuadrante y el resto de razones trigonométricas de α
b) Hallar el cuadrante y el valor del cos (2α)
c) Hallar el cuadrante y el valor del sen $(\alpha/2)$
a) Hallar el cuadrante y el valor de tag $(\alpha - \pi/4)$

EJERCICIO 27 : Sabiendo que 90º < x < 270º y sen x = -2/5, hallar, sin utilizar calculadora, el cuadrante y el valor de : a) sen (2x) b) cos (x/2) c) ctg (x + 45º)

SIMPLIFICAR

EJERCICIO 28 : Simplificar las siguientes expresiones trigonométricas

a) $\dfrac{(1-\text{tag}^2 x)\,\text{sen}\,x.\sec^2 x}{(\cos^2 x-\text{sen}^2 x)\,\text{tag}x}$

b) $\dfrac{\text{sen}(\pi+x)\,\text{tag}\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)}{\sec^2\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right).(1-\cos^2 x)\cos x}-\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$

c) $\dfrac{1}{1-\text{sen}\,x}+\dfrac{1}{1+\text{sen}\,x}-2$

d) $\left[\dfrac{\sec x}{1+\text{tag}^2 x}\right]:\left[(\text{sen}\,x+\cos x)^2-(\text{sen}\,x-\cos x)^2\right]$

DEMOSTRAR IDENTIDADES

EJERCICIO 29 : Comprobar si son ciertas las siguientes identidades trigonométricas:

a) $\dfrac{1-\text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}=\cos\alpha$

b) $\text{tag}x+\dfrac{1}{\text{tag}x}=\text{tag}x.\dfrac{1}{1-\cos^2 x}$

c) $\cos^2 x+\text{sen}^2 x+\text{tag}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

d) $1+\dfrac{1}{\text{tag}^2 x}=\dfrac{1}{\text{sen}^2 x}$

EJERCICIO 30 : Demuestra las siguientes igualdades:

a) $\dfrac{\text{sen}\,x\cos x}{\cos^2 x-\text{sen}^2 x}=\dfrac{1}{2}\text{tg}\,2x$

b) $\text{sen}(x+y)\cdot\text{sen}(x-y)=\text{sen}^2 x-\text{sen}^2 y$

c) $\cos(x+45^\circ)\cdot\cos(x-45^\circ)=\dfrac{1}{2}\cos 2x$

d) $\dfrac{\text{sen}\,2x}{\text{sen}\,x}+\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{5\cos x+1}{2}$

e) $\cos x+2\,\text{sen}^2\dfrac{x}{2}=1$

f) $\dfrac{\text{sen}\,x}{1+\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{\text{sen}\,x}=\dfrac{4+4\cos x}{2\,\text{sen}\,x+\text{sen}\,2x}$

ECUACIONES

EJERCICIO 31 : Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica:

a) $\text{tag}^2 x-\text{tag}\,x=0$

b) $2\cos^2 x-\text{sen}^2 x+1=0$

c) $2\,\text{sen}x.\cos^2 x-6\,\text{sen}^3 x=0$

d) $\cos(2x+20º)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e) $3\sec x-2\,\text{sen}\,x.\text{tag}\,x=-3$

f) $\text{sen}^2 x+\dfrac{1}{\sec x}=\dfrac{5}{4}$

EJERCICIO 32 : Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\cos 2x = 3\operatorname{sen} x - 1$ b) $\operatorname{sen}^2 x = 1 + \cos^2 x$ c) $\left(\operatorname{sen}^2 x\right) - 1 = 2\cos^2 x$

d) $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x + 2\operatorname{sen}^2 x = 0$ e) $2 - 4\cos^2 x = 2\operatorname{sen} x$ f) $\cos 2x + \operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2} = 0$

g) $\operatorname{sen}\left(x + 45^\circ\right) + \operatorname{sen}\left(x - 45^\circ\right) = 1$ h) $\cos^2 \frac{x}{2} \cos x = \frac{1}{4}$ i) $\cos 2x + \cos^2 x = 2$

j) $\cos(6.x) + \cos(8.x) = -\sqrt{3}.\cos x$ k) $\cos 5x + \cos 3x = \sqrt{2}.\cos 4x$

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

EJERCICIO 33 : Representa gráficamente y estudia las propiedades de las siguientes funciones:

a) $y = \cos(x + \pi)$ b) $y = \operatorname{sen} x + 1$

PROBLEMAS

EJERCICIO 34 : Un barco, pide socorro recibiéndose la señal en dos estaciones A y B que distan entre sí 45 Km. Desde cada estación se miden los ángulos BAC = 44º 55' y ABC = 52º 16'. ¿A qué distancia se encuentra el barco de cada estación?

EJERCICIO 35 : Tres puntos A, B y C están unidos por carreteras rectas y llanas. La distancia AB es de 6 Km, la de BC es de 9 Km, el ángulo que forman AB y BC es de 120º. ¿Cuál es la distancia de A a C?. Calcular los otros dos ángulos.

EJERCICIO 36 : Desde dos puntos situados en la misma orilla de un río y separados entre si 30 m se observa un árbol situado en la otra orilla. La distancia del primer punto al pie del árbol es de 24 m y el ángulo que forma la visual del segundo punto con respecto al árbol es de 45º 37'. Calcular la distancia del segundo punto al árbol y el ángulo que forma la visual del primer punto.

EJERCICIO 37 : Resolver el siguiente triángulo: A = 30º, a = 40 m, b = 65 m. Calcular su área. Enuncia las resultados teóricos que utilices).

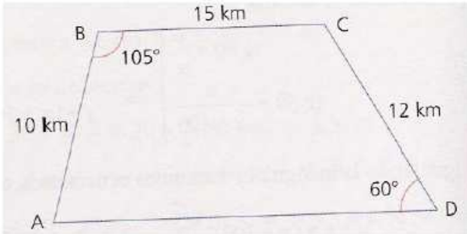
EJERCICIO 38 : Dos amigos parten de un mismo punto en dirección a dos ciudades situadas a 200 y 300 Km, respectivamente, del punto de partida. El ángulo que forman dichas carreteras es de 60º. En sus coches llevan un teléfono móvil que tiene un radio de alcance de 250 Kms. ¿Podrán ponerse en contacto cuando lleguen a su destino?. Calcular los otros dos ángulos.

EJERCICIO 39 : Dos asistentes a una conferencia se sitúan en las dos butacas extremas de una fila. Cada uno desde su posición, mide el ángulo que determinan el conferenciante y el otro asistente obteniéndose resultados de 37º y 42º. ¿A qué distancia está cada uno de ellos del conferenciante?. ¿A qué distancia se encuentran ambos del escenario?. Desde una butaca a la otra hay una distancia de 30 m.

EJERCICIO 40 : Una antena de telefonía móvil está sujeta al suelo con dos cables desde su punto más alto, y uno de los cables tiene doble longitud que el otro. Los puntos de sujeción de los cables al suelo están alineados con el pie de la antena, la distancia entre dichos anclajes es de 70 metros y el ángulo formado por los cables es de 120º. Calcula la longitud de cada uno de los cables y la altura de la antena de telefonía.

EJERCICIO 41 : De un triángulo ABC sabemos que a = 12 cm, b = 18 cm y A + B = 110º ¿Cuánto valen A y B?

EJERCICIO 42 : En un mapa de carreteras observamos los pueblos A, B, C y D como se indica en la figura. Por un error no aparece la distancia entre los pueblos A y D, pero si las distancias y ángulos que forman las carreteras que los unen. Calcula la distancia entre los pueblos A y D.



EJERCICIO 43 : En una circunferencia de radio 10 cm trazamos la cuerda AB de 8 cm. Si O es el centro de la circunferencia, halla el ángulo AOB.

EJERCICIO 44 : Desde una carretera se ve el punto más alto de una montaña, y la visual de dicho punto forma un ángulo de 40º con la horizontal. La carretera avanza hacia la montaña en línea recta, y después de avanzar 5 Km, vemos que la visual con el pico y la horizontal forma un ángulo de 75º. ¿Qué altura tiene la montaña?

TEMA 4 : NÚMEROS COMPLEJOS

EJERCICIO 1 : Calcula en forma binómica y representa gráficamente la solución:

a) $\dfrac{(3-i)i^3}{1-2i}$ b) $\dfrac{13i^4(2-i)}{3-2i}$ c) $\dfrac{-10i^7(2-3i)}{4+2i}$

d) $\dfrac{25i^{21}(1-7i)}{1+7i}$ e) $\dfrac{(3-i)^2}{1+i}$ f) $\dfrac{5i^{10}(1-i)}{3-i}$

EJERCICIO 2 :

a) Representa gráficamente el número $z = -1 - i$ y halla su opuesto y su conjugado.

b) Expresa en forma polar $z = -1 - i$.

EJERCICIO 3 : Considera el número complejo $z = 2 - 2\sqrt{3}i$.

a) Represéntalo gráficamente y escribe su opuesto y su conjugado.

b) Expresa z en forma polar.

EJERCICIO 4 :

a) Expresa en forma binómica el número complejo $z = 6_{210^\circ}$ y represéntalo gráficamente.

b) Escribe el opuesto y el conjugado de z.

EJERCICIO 5 : Calcula el valor de z^6, sabiendo que $z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

EJERCICIO 6 : Calcula la cuarta potencia del número complejo $z = -2 + 2\sqrt{3}i$.

EJERCICIO 7 : Halla las raíces cuartas de 16 y represéntalas gráficamente. ¿Qué figura obtienes si unes los afijos de las raíces obtenidas?

<u>EJERCICIO 8</u> :
Representa gráficamente los resultados de hallar $\sqrt[3]{1-i}$. ¿Qué figura obtenemos al unir los afijos de las raíces obtenidas?

<u>EJERCICIO 9</u> : Halla las raíces sextas de -1 e interpreta gráficamente los resultados obtenidos.

<u>EJERCICIO 10</u> : Resuelve las siguientes ecuaciones:
a) $3z^4 + 27z^2 = 0$ b) $ix^3 + 8 = 0$ c) $2z^6 + 2 = 0$

<u>EJERCICIO 11</u> :
Representa $z = 2 - 2i$, su opuesto y su conjugado, y exprésalos en forma polar.

<u>EJERCICIO 12</u> : Calcula z^8 , sabiendo que $z = 1 + \sqrt{3}i$.

<u>EJERCICIO 13</u> : Halla los números complejos, z, que cumplen la siguiente igualdad:
$z^3 + 64 = 0$

<u>EJERCICIO 14</u> : Calcula: $\sqrt[4]{-81}$

<u>EJERCICIO 15</u> : Halla un número complejo, z, sabiendo que una de sus raíces quintas es $2 - 2i$.

<u>EJERCICIO 16</u>
a) Dado el número complejo $z = 1 - \sqrt{3}i$, escribe su opuesto y su conjugado, y representa los tres números.
b) Escribe z, $-z$ y $\bar{z}$ en forma polar.

<u>EJERCICIO 17</u> : Escribe el opuesto y el conjugado de $z = 2\sqrt{3} - 2i$.
Escribe los tres números en forma polar y represéntalos.

<u>EJERCICIO 18</u>
a) Escribe en forma binómica $z = 2_{30^\circ}$.
b) Halla su opuesto y su conjugado en forma binómica y polar.
c) Representa z, $-z$ y $\bar{z}$.

<u>EJERCICIO 19</u>
a) Expresa en forma polar $z = \sqrt{3} - i$.
b) Escribe en forma binómica y en forma polar el opuesto y el conjugado de z.
c) Representa z, $-z$ y $\bar{z}$.

EJERCICIO 20 : Calcula:

a) $\dfrac{(2-3i)i^{25}}{(-1+2i)}$ b) $\sqrt[4]{-81}$ c) $\dfrac{(1-3i)}{(3-4i)}+i^{37}$ d) $\sqrt[3]{2-2i}$ e) $\dfrac{i^{30}(2+3i)}{(4-i)}$

f) $\sqrt[4]{-1}$ g) $\sqrt[3]{27i}$ h) $\dfrac{(2+2i)}{-1+3i}-i^{28}$ i) $\dfrac{(7-i)i^{43}}{-2+i}$ j) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}i}$

EJERCICIO 21 : Calcular x para que $\dfrac{x+9i}{3-i}$ sea un número imaginario puro.

EJERCICIO 22 : El número complejo de módulo 12 y argumento 150º es el producto de dos número complejos, uno de los cuales es el número 4. Di cuál es el otro y exprésalo en forma binómica.

EJERCICIO 23 : El producto de un número complejo de argumento 60º por otro de módulo 5 nos da como resultado el número complejo $-6+6\sqrt{3}\,i$. Halla el módulo del primero y el argumento del segundo.

EJERCICIO 24 : Halla dos números complejos conjugados cuyo cociente sea un imaginario puro y su diferencia sea 4i.

EJERCICIO 25 : Un cuadrado con centro en el origen de coordenadas tiene uno de sus vértices en el punto A(3,4). Calcular los demás vértices.

EJERCICIO 26 : Calcular dos números complejos cuya suma es un número real, su diferencia tiene por parte real –1 y su producto vale 15 + 3i

TEMA 5: VECTORES

EJERCICIO 1 : Las coordenadas de dos vectores son $\vec{a}(2,-3)$ y $\vec{b}\left(-\frac{1}{2},2\right)$. Obtén las coordenadas de :

a) $-3.\vec{a}+2\vec{b}$ b) $-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$ c) $\frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{b})$

EJERCICIO 2 : Expresa el vector $\vec{x}$ (5,-2) como combinación lineal de $\vec{y}$ (1,-2) y $\vec{z}\left(\frac{1}{2},2\right)$

EJERCICIO 3 : Dados los vectores $\vec{u}$ (-1,4), $\vec{v}$ (3,m) y $\vec{w}$ (2,-3)

a) Calcula m para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.

b) Halla el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{w}$

EJERCICIO 4 : Considera los vectores $\vec{x}$ (a,3) e $\vec{y}$ (-1,b). Halla los valores de a y b para que $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sean perpendiculares y $|\vec{x}|=5$

EJERCICIO 5 : Dados $\vec{x}$ (5,-4), $\vec{y}$ (3,2) y $\vec{z}$ (1,k)

a) Halla el valor de k para que $\vec{x}$ e $\vec{z}$ formen un ángulo de 90º.

b) Halla un vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido que $\vec{x}$

c) Halla un vector unitario con la misma dirección y sentido contrario que $\vec{x}$

d) Halla un vector de módulo 3 y perpendicular a $\vec{x}$

EJERCICIO 6 :

a) Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{a}\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$ y $\vec{b}$ (1,1)

b) ¿ Cuál sería el valor de x para que el vector $\vec{u}$ (1,x) fuera perpendicular al vector $\vec{a}$?

EJERCICIO 7 : Dados los puntos A(2, −1), B(−3, 4) y C(0, −8):
a) Halla el punto medio del segmento de extremos A y B.
b) Halla el simétrico de B con respecto a C.

EJERCICIO 8 : Averigua las coordenadas del punto P, que divide al segmento de extremos A(2,-4) y B(1,3) en dos partes tales que $\vec{AP}$ es el triple de $\vec{PB}$

EJERCICIO 9 : Halla las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices A(2, −3), B(4, 1) y C(−1, 2).

EJERCICIO 10 : El punto medio del segmento AB es M(2, −1). Halla las coordenadas de A, sabiendo que B(−3, 2).

EJERCICIO 11 : Halla las coordenadas del vértice D del paralelogramo ABCD, sabiendo que A(−1, −2), B(3, 1) y C(1, 3).

EJERCICIO 12 :Dados los puntos A(2, −3), B(−1, 4) y C(x, 3), determina el valor de x para que A, B y C estén alineados.

EJERCICIO 13 :
a) Calcular las componentes del vector cuyo origen es el punto A(2,-1) y cuyo extremo es B(4,7)
b) Calcular el punto medio del segmento determinado por los puntos A(2,-1) y B(4,7)
c) Calcular la longitud del segmento $\vec{AB}$

EJERCICIO 14 : Calcular las componentes del vector que tiene su origen en el punto R(1,- $\sqrt{2}$) y su extremo en el punto S=(-2, $\sqrt{2}$). Calcular el punto medio del segmento $\vec{RS}$. Calcular la longitud del segmento RS. Calcular el ángulo que forman los vectores $\vec{AB}$ (Del ejercicio anterior) con $\vec{RS}$.

EJERCICIO 15 : Calcular el simétrico de A(1,2) respecto de B(3,-1)

EJERCICIO 16 : Dados los puntos A(2,4) y B(17,-32) encontrar los puntos M y N que dividen el segmento AB en 3 partes iguales.

EJERCICIO 17 : Dados los puntos A(-1,3), B(2,7), C(O,-2)

a) Calcular $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ b)Calcular su modulo

c) Calcular un vector paralelo a $\overrightarrow{CA}$ de módulo 10

d) Calcular un vector perpendicular a $\overrightarrow{CA}$ de módulo 10

e) Calcular un vector ortonormal a $\overrightarrow{CA}$

EJERCICIO 18 : Calcular m para que los vectores (1,-3) y (m,-4)
a) Sean ortogonales
b) Tengan -7 como producto escalar

EJERCICIO 19 : Dados los vectores $\vec{v}$ (-1,7), $\vec{w}$ (x,2), calcular x para que:
a) Sean ortogonales
b) Sean paralelos
c) Formen un ángulo de 60º

EJERCICIO 20 : Escribir las coordenadas del vector $\vec{a}$ =(6,-15) con respecto a la base {(1,-2),(1,-3)}

EJERCICIO 21 : Hallar x para que el vector $\vec{v}$ (-2,x)
a) Sea ortogonal con el vector (3,4)
b) Forme un ángulo de 180' con el vector (3,4)

EJERCICIO 22 : Calcular un vector ortonormal al (1,-2) (es decir, ortogonal y unitario).

EJERCICIO 23 : Dado el vector $\vec{u}$ = (4, -3) calcular:
a) Un vector ortonormal a él.
b) Un vector paralelo a u del mismo sentido y módulo 2.
c) Un vector paralelo a u de sentido contrario y módulo 2.

EJERCICIO 24 : Calcular el punto C que divide el segmento AB en dos partes tal que una es el triple que la otra, siendo A = (-1,7) y B = (3,4).

EJERCICIO 25 : Dados los vectores $\vec{u}$ = (2,1) y $\vec{v}$ =(m, l). Calcular m para que:

a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos

b) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares

e) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ formen un ángulo de 45"

d) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tengan el mismo módulo

EJERCICIO 26 : Dado el vector $\vec{u}$ = (4, -3) calcular:
a) Un vector ortonormal a él.
b) Un vector paralelo a u del mismo sentido y módulo 2.
c) Un vector paralelo a u de sentido contrario y módulo 2.

EJERCICIO 27 : Dado el vector $\vec{u} = (2,5)$. Calcular

a) Un vector ortonormal a $\vec{u}$.

b) La proyección del vector $\vec{v} = (1,-2)$ sobre u y el vector proyección.

c) Las coordenadas de u en la base {(4,3),(5,2)}

EJERCICIO 28 : Dado los vectores (2,4) y (3,-l)

a) Calcular el ángulo que forman

b) Representarlos en un sistema de referencia.

c) Calcular gráficamente su suma y su diferencia.

EJERCICIO 29 : Dados dos vectores u y v tales que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ y forman un ángulo de 60º , Calcular:

a) $|\vec{u} + \vec{v}|$

a) El ángulo que forma $\vec{u}$ con $2\vec{v}$

b) El ángulo que forma $\vec{u}$ con $-2\vec{v}$

EJERCICIO 30 : Calcular la proyección del vector $\vec{u} = (2,3)$ sobre el vector $\vec{v} = (-4, 1)$. Calcular también el vector proyección.

EJERCICIO 31 : Explica si los siguientes vectores forman una base del plano

a) (1,2) (3,4) b) (2,3) (4,5) (1,0) e) (1,2) (2,4) d) (0,0) (2,5)

En caso afirmativo expresar el vector (-1,2) como combinación lineal de dicha base.

EJERCICIO 32 : Escribe los vectores $\vec{v}$ (6,0), $\vec{w}$ (-12,-2), $\vec{u}$ (18,2) como combinación lineal de la base {(-2,3),(8,-5)}

EJERCICIO 33 :

a) Dada la base B = {(2,1),(3,-1)} calcular las coordenadas del vector $\vec{v} = (1,3)$ en dicha base.

b) Calcular un vector paralelo a $\vec{u} = (3,-2)$ unitario y de sentido contrario.

EJERCICIO 34 : Dados los vector $\vec{u}$ (2,4) y $\vec{v}$ (3,1), halla el módulo del vector $\vec{u} - \vec{v}$.

EJERCICIO 35 : Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos veces tales que $|\vec{u}| = 9$ y $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = 17$. Calcular el módulo de $\vec{v}$.

EJERCICIO 36 : Dos vectores a y $\vec{b}$ son tales que $|\vec{a}| = 10$ y $|\vec{b}| = 10\sqrt{3}$ y $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$. Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

EJERCICIO 37 : Sabiendo que $|\vec{a}| = 2$ y $|\vec{b}| = 6$ y que ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es de 60º, calcular: $|\vec{a} + \vec{b}|$; $|\vec{a} - \vec{b}|$

TEMA 6: GEOMETRÍA ANALÍTICA

EJERCICIO 1: Dada la recta que pasa por P(-2,0) y tiene por vector director $\vec{v}$ (2,2). Escribir su ecuación en todas las formas posibles.

EJERCICIO 2: Escribir en forma vectorial y general las ecuaciones de las rectas:

a) $\begin{cases} x = -2-3t \\ y = 1+2t \end{cases}$ b) $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{-5}$ c) $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases}$

EJERCICIO 3: Dada la recta $\frac{x+6}{2} = \frac{y-1}{-2}$ elige un vector director y un punto de dicha recta. Escríbela en todas, sus formas.

EJERCICIO 4: Escribe en todas sus formas la ecuación de la recta que pasa por M(3,1) N(-2,4)

EJERCICIO 5: Calcular el vector director de la recta $2x + 3y - 4 = 0$

EJERCICIO 6: Calcula m para que la recta $2mx - m^2y + 2m + 9 = 0$ pase por el punto (-1,1)

EJERCICIO 7: Dadas las rectas: a) $3x - 2y + 5$ b) $y = (5/3)x - 2$
Encuentra su vector director y su pendiente.

EJERCICIO 8: Comprueba si los puntos A(2,6), B(-1,3) y Q-4,0) están alineados

EJERCICIO 9: Dada la recta $3x + 6y + 7 = 0$ determinar:
a) Vector director
b) Pendiente
c) Distancia de] origen de coordenadas a la recta.

EJERCICIO 10: Dada la recta de ecuación r :$4x + 3y + 3 = 0$
a) Calcular su pendiente
b) Calcular las ecuaciones de las rectas paralelas a r que se encuentran a dos unidades de distancia.

EJERCICIO 11: Calcular el valor de m para que las rectas r: $2x+my-4 = 0$ y s: $y = 3t+1$ sean:
a. Paralelas b. Perpendiculares

EJERCICIO 12: Hallar la ecuación de la recta que forma un ángulo de 45° con el eje positivo de abscisas y pasa por el punto (4,5).

EJERCICIO 13: Calcular las ecuaciones de las rectas paralelas a $2x+3y-4 = 0$ que disten 2 unidades M punto (5,7). (Ayuda: Existen dos)

EJERCICIO 14: Ecuación de la recta perpendicular a $y = 2x - 3$ y que pasa por el punto de corte de las rectas: r : $x + 2y = 0$
r': $x = -t$; $y = -5 + 3t$

EJERCICIO 15 : Determinar las coordenadas de un punto P, sabiendo que pertenece a la recta $x - y + 1 = 0$ y dista 5 unidades del origen.

EJERCICIO 16: Dadas las rectas r: $mx + 2y + 6 = 0$ s: $nx + y -= 9$

Hallar el valor de m y de n para que sean paralelas y la recta s pase por el punto (18,0)

EJERCICIO 17:
a) Calcular la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A(2,1) y B(4,-3)
b) Calcular su pendiente
c) Calcular una recta perpendicular a la recta r del apartado a) que pase por el punto (2,0)
d) Distancia de la recta r al punto (1,0)
e) Ángulo que forma la recta r con la recta $x + y + 2 = 0$

EJERCICIO 18: Sea la recta r:$x+y-5=0$ y el punto P(6,2)

a) Ecuación de un recta paralela a r situada a una distancia de $3.\sqrt{2}/2$

b) Ángulo que forma la recta r con la recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto P.

EJERCICIO 19: Dada la recta de ecuación r: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2t \end{cases}$

a) Calcular su pendiente

b) Calcular su ecuación segmentaria

c) Calcular una recta que forme con r un ángulo de 45a y pase por el punto (2,-1).

d) Calcular la ecuación de las rectas paralelas a "r" a dos unidades de distancia.

EJERCICIO 20: Dada la recta r: $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} = 3$

Calcular una recta paralela y otra perpendicular a la recta r por el punto de intersección de las rectas r': $y = 2x - 1$ r'': $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-1}$

EJERCICIO 21: Dada la recta r: x - y + 3 = 0

Calcular la distancia del punto de corte de las rectas s : $2x + y = 0$ m : $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t - 6 \end{cases}$ a la recta r.

EJERCICIO 22 :

a) Calcular m para que las rectas r : 2x + my - 4 = 0 y s : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t + 1 \end{cases}$ sean :

a.1) Paralelas a. 2) Perpendiculares

b) Calcular las ecuaciones de las rectas paralelas a r : $\frac{x}{-3} = \frac{y-2}{2}$ que distan dos unidades del punto P(5,7).

c) Calcular la ecuación de la recta que forma un ángulo de 45° con r : 2x + 3y = 2 y pasa por el punto de ordenada en el origen -3.

EJERCICIO 23: Dada la recta r: x+2y= 6

a) Calcular el simétrico del punto A(3,0) respecto de r.

b) Calcular la recta simétrica de r" respecto de r.

EJERCICIO 24: Calcular el simétrico del punto (2,1) respecto de la recta: 4x +3y+3 = 0

EJERCICIO 25:

a) Ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos A(1,-2) y B(3,0) y el ángulo que forma esa mediatriz con el eje OX.

b) Calcular el área y el ortocentro del triángulo de vértices A(1, l), B(4,2), C = (3,5).

EJERCICIO 26: En un triángulo ABC el vértice A es (2,5) y el punto medio de BC es (3, 1) y el punto medio del lado AB es (0,4).

a) Hallar los vértices B y C

b) Hallar el área del triángulo

c) Calcular la ecuación de la recta altura correspondiente al vértice A d) Calcular las coordenadas del circuncentro.

EJERCICIO 27: Sea un paralelogramo de vértices A = (7,4), B = (2,2), C = (3,5). Calcular el cuarto vértice, su área y su perímetro y la ecuación de una de sus diagonales.

EJERCICIO 28: En un triángulo ABC, el vértice A tiene de coordenadas (2,5). El punto medio de BC es (3, 1) y el punto medio del lado AB es (0,4). Calcular:

a) Los vértices B y C

b) El área del triángulo.

TEMA 7: FUNCIONES ELEMENTALES

- **¿ Son funciones?**

EJERCICIO 1: Indica cuáles de las siguientes representaciones corresponden a la gráfica de una función. Razona tu respuesta:

- **Calcular el dominio dada la expresión analítica de una función**

EJERCICIO 2: Calcular el dominio de definición de las siguientes funciones:

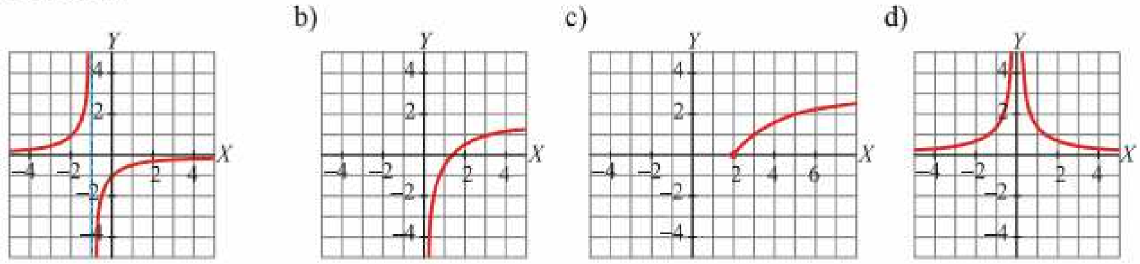
a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 6}$ b) $y = \sqrt{1+x}$ c) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ e) $y = \sqrt[3]{2x-4}$

f) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ g) $y = \sqrt{x^2-4}$ h) $y = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{2x+3}}$ i) $y = \text{Log}\ \dfrac{x-3}{(x-2)^2}$

- **Calcular el dominio y el recorrido dada su representación gráfica**

EJERCICIO 3 : Observando la gráfica de estas funciones, indica cuál es su dominio de definición y su recorrido.

a) b) c) d)



- **Problemas de dominios**

EJERCICIO 4 : A una hoja de papel de 30 cm × 20 cm le cortamos cuatro cuadrados (uno en cada esquina) y, plegando convenientemente, formamos una caja cuyo volumen es:

$$V = x.(20-2x).(30-2x)$$

¿Cuál es el dominio de definición de esta función?

EJERCICIO 5 : Las tarifas de una empresa de transportes son:

- Si la carga pesa menos de 10 toneladas, 40 euros por tonelada.
- Si la carga pesa entre 10 y 30 toneladas, 30 euros por tonelada (la carga máxima que admiten es de 30 toneladas).

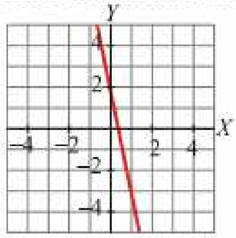
Si consideramos la función que nos da el precio según la carga, ¿cuál será su dominio de definición?

- **Representación gráfica de funciones lineales**

EJERCICIO 6 : Representa gráficamente y estudia sus propiedades:
a) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ b) $2x + y - 1 = 0$ c) $y = \frac{2x-3}{4}$

- **Hallar la ecuación de una recta**

EJERCICIO 7 : Escribe la ecuación de la recta cuya gráfica es la siguiente:



EJERCICIO 8 : Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2, –4) y (–1, 3).

EJERCICIO 9 : Halla la ecuación de la recta que pasa por (2,-1) y cuya pendiente es $\frac{2}{3}$

EJERCICIO 10 : Di cuál es la pendiente de cada una de estas rectas:
I) $2x + y = 0$ II) $x - 2y + 1 = 0$ III) $y = 2$

- **Problemas de interpolación lineal**

EJERCICIO 11 : Si consumimos 60 m^3 de gas tendremos que pagar un recibo de 35,96 euros, y por un consumo de 80 m^3 tendríamos que pagar 43,56 euros. ¿Cuál sería el precio del recibo si consumiéramos 70 m^3 de gas?

EJERCICIO 12 : Al apuntarnos en un gimnasio, hemos tenido que pagar una cantidad fija en concepto de matrícula. Después tendremos que ir pagando las mensualidades. Si estamos 6 meses, nos gastaremos en total 246 euros, y si estamos 15 meses, nos costará 570 euros. ¿Cuánto nos gastaríamos en total si estuviéramos yendo durante un año?

EJERCICIO 13 : Sabiendo que 15° C (grados centígrados) equivalen a 59° F (grados Fahrenheit), y que 30° C son 86° F, averigua cuántos grados centígrados son 70° F.

- **Función cuadrática**

EJERCICIO 14 : Halla el vértice de las siguientes parábolas:
a) $y = 2x^2 - 10x + 8$ b) $y = 2x^2 - 8x + 2$

EJERCICIO 15 : Halla los puntos de corte con los ejes de la parábola $y = -x^2 + 4x$

EJERCICIO 16 : Representa gráficamente y estudia sus propiedades
a) $y = x^2 - 3x$ b) $y = -x^2 + 4x - 1$ c) $y = (x-1)^2 + 3$

- **Problemas de interpolación cuadrática**

EJERCICIO 17 : De una función se sabe que f(1) = 0, f(2) = 3 y f(-1) = 6. Halla la función de segundo grado y utilízala para estimar el valor de f(0).

EJERCICIO 18 : Los gastos de producción y los ingresos por ventas (ambos expresados en millones de euros) de cierta empresa durante los tres últimos años han sido los siguientes:

GASTOS	3	4	6
INGRESOS	10	12	20

a) Halla el polinomio interpolador de segundo grado que exprese los ingresos en función de los gastos.
b) ¿Qué ingresos cabría esperar este año si los gastos de producción fuesen de 5 millones de euros?

- **Función radical**

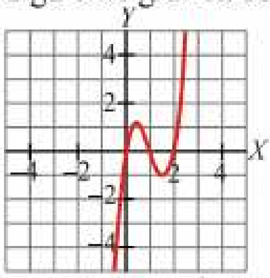
EJERCICIO 19 : Representa y estudia las propiedades de las siguientes funciones:
a) $y = \sqrt{x+1}$ b) $y = -\sqrt{x-2}$ c) $y = \sqrt{2-x}$ d) $y = \sqrt{x^2-4}$

- **Función de proporcionalidad inversa**

EJERCICIO 20 : Representa y estudia las propiedades de las siguientes funciones:
a) $y = \frac{1}{x-1}$ b) $y = \frac{3}{x-4} + 2$ c) $y = \frac{2x+3}{x-3}$ d) $y = \frac{3x-3}{2-x}$

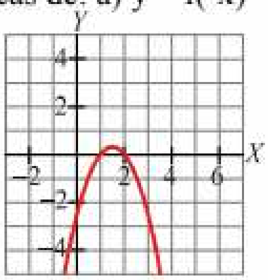
- **Transformaciones de funciones**

EJERCICIO 21 : La siguiente gráfica corresponde a la función y = f(x) :

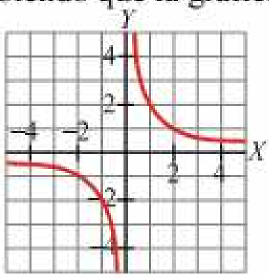


A partir de ella, representa: a) y = f(x) + 3 b) y = f(x - 2)

EJERCICIO 22 : A partir de la gráfica de y = f(x) :
construye las gráficas de: a) y = f(-x) b) y = 1+ f(x)

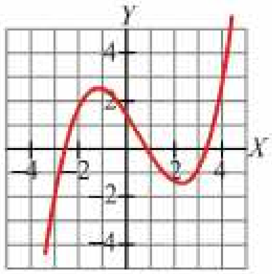


EJERCICIO 23 : Sabiendo que la gráfica de $y = f(x)$ es la siguiente:



construye, a partir de ella, las gráficas de: a) $y = f(x + 1)$ b) $y = f(x) + 1$

EJERCICIO 24 : Sabiendo que la gráfica de f(x) es la de la izquierda representa la gráfica de $y = |f(x)|$



- **Funciones a trozos**

EJERCICIO 25 : Halla $f(-1)$, $f(0)$ y $f(3)$, siendo: $f(x)=\begin{cases} 4x^2+1 & \text{si } x \le -1 \\ x-1 & \text{si } -1 < x \le 2 \\ 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

EJERCICIO 26 : Representa gráficamente y estudia sus propiedades:

a) $y = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x \le 1 \\ x^2-2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & \text{si } x \le 1 \\ -x+\dfrac{1}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- **Funciones con valor absoluto**

EJERCICIO 27 : Representa y estudia las propiedades de las siguientes funciones:

a) $y = |2x - 4|$ b) $y = \left|\dfrac{x-1}{2}\right|$ c) $y = |x^2 + 2x| + x - 2$

- **Repaso**

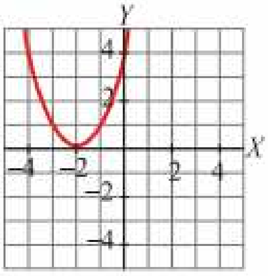
EJERCICIO 28 : Representa gráficamente y estudia sus propiedades

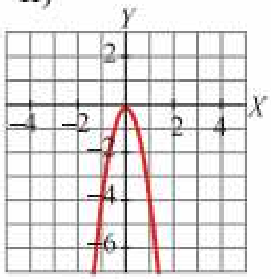
a) $y = |4x + 2|$ b) $y = \sqrt{x+3}$ c) $y = \left|\frac{x-1}{3}\right| + 4$ d) $y = \frac{x^2}{2} - 2x + 2$

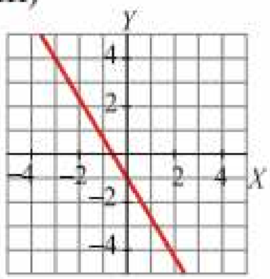
e) $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 - 3x + 4 & \text{si } x < 0 < 2 \\ 2 & \text{si } 2 < x < 7 \end{cases}$ f) $y = \frac{3-x}{x+1}$

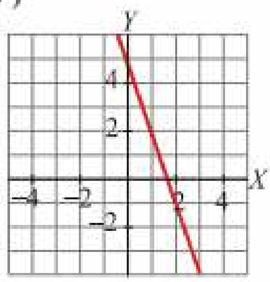
EJERCICIO 29 : Asocia a cada gráfica su ecuación:

a) $y = -3x + 5$ b) $y = (x+2)^2$ c) $y = -\frac{5}{3}x - 1$ d) $y = -4x^2$

I)


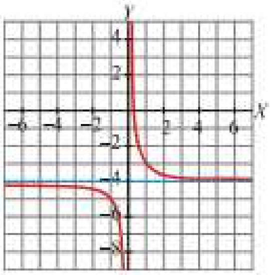
II)


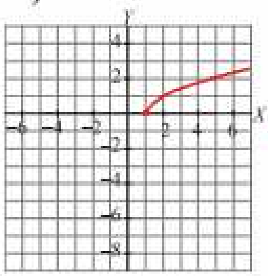
III)


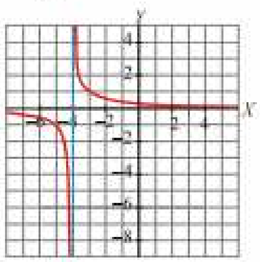
IV)


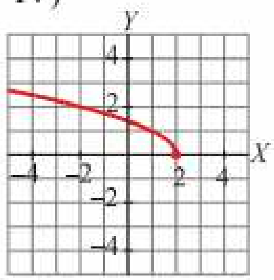
EJERCICIO 30 : Asocia a cada una de las gráficas una de las siguientes expresiones analíticas:

a) $y = \frac{1}{x+4}$ b) $y = \sqrt{x-1}$ c) $y = \frac{1}{x} - 4$ d) $y = \sqrt{2-x}$

I)


II)


III)


IV)


- **Problemas**

EJERCICIO 31 : Un cántaro vacío con capacidad para 20 litros pesa 2550 gramos. Escribe la función que nos da el peso total del cántaro según la cantidad de agua, en litros, que contiene.

EJERCICIO 32 : El perímetro de un rectángulo es de 30 cm. Obtén la función que nos dé el área del rectángulo en función de la longitud de la base.

EJERCICIO 33 : El precio por establecimiento de llamada en cierta tarifa telefónica es de 0,12 euros. Si hablamos durante 5 minutos, la llamada nos cuesta 0,87 euros en total. Halla la función que nos da el precio total de la llamada según los minutos que estemos hablando.

EJERCICIO 34 : Un muelle mide 7 cm cuando colgamos de él un peso de 10 gramos, y mide 13 cm cuando colgamos de él 80 gramos.
a) Estima, mediante interpolación lineal, cuánto medirá si colgamos de él 50 gramos.
b) Escribe la ecuación de la recta que nos da la longitud, y, en función del peso que colgamos, x.
c) Representa gráficamente la función anterior.

EJERCICIO 35 : Subiendo una montaña, medimos la temperatura a 360 m de altura, y esta era de 8º C. Cuando estábamos a 720 m de altura, la temperatura era de 6º C.
a) Estima, mediante interpolación lineal, la temperatura que había a 500 m de altura.
b) Halla la expresión analítica de la recta que nos da la temperatura en función de la altura, y represéntala gráficamente.

- **Composición de funciones**

EJERCICIO 36 : Dadas las funciones $f(x) = 2x^2 - 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$, calcula:
a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$

EJERCICIO 37 : Considera las funciones f y g definidas por: $f(x) = \frac{x+1}{3}$, $g(x) = x^2 - 1$
Calcula: a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$

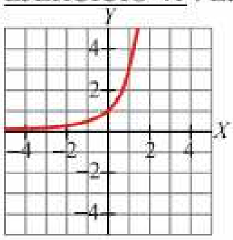
EJERCICIO 38 : Sabiendo que $f(x) = x - x^2$ y $g(x) = \text{sen } x$, halla:
a) $(g \circ f)(x)$ b) $(g \circ g)(x)$

EJERCICIO 39 : Con las funciones: $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \frac{1}{x}$ hemos obtenido, por composición, estas otras: $p(x) = \frac{1}{x^2+1}$ $q(x) = \frac{1}{x^2}+1$. Explica cómo, a partir de f y g, se pueden obtener p y q.

EJERCICIO 40 : Dadas las funciones: $f(x) = \frac{x^2}{2}$ y $g(x) = \sqrt{x+1}$. Explica como, a partir de ellas, se pueden obtener por composición estas otras: $p(x) = \frac{x+1}{2}$ $q(x) = \sqrt{\frac{x^2}{2}+1}$

- **Inversa de una función**

EJERCICIO 41 : La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$:



a) Calcula $f^{-1}(3)$ y $f^{-1}(1)$
b) Representa en los mismos ejes, $f^{-1}(x)$ a partir de la gráfica de f(x)

EJERCICIO 42 : Halla la función inversa de estas funciones y comprobarlo analíticamente:
a) $f(x) = \frac{2x+1}{3}$ b) $y = 4x^3 - 1$ c) $y = 3 - \sqrt{2x^2-1}$ d) $y = \frac{x-5}{2x+1}$

- **Funciones exponenciales y logarítmicas**

EJERCICIO 43 : Representa la gráfica de las siguientes funciones y estudia sus propiedades

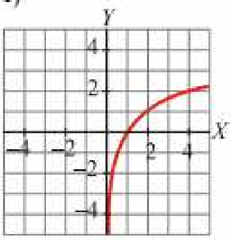
a) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$ b) $y = 1 + \log_2 x$ c) $y = \log_{1/3} x$ d) $y = 2^{1+x}$

e) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x}$ f) $y = \log(x+1)$ g) $y = e^x$ h) $y = \text{Ln}\, x$

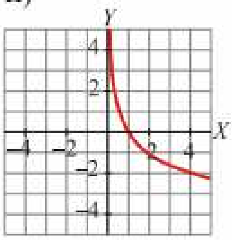
EJERCICIO 44 : Asocia cada una de las siguientes gráficas con su ecuación:

a) $y = 2^x$ b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ c) $y = \log_2 x$ d) $y = \log_{1/2} x$

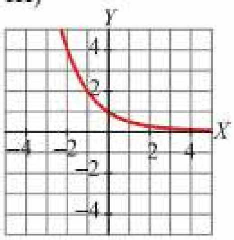
I)



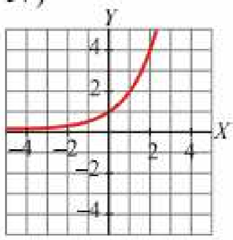
II)



III)



IV)



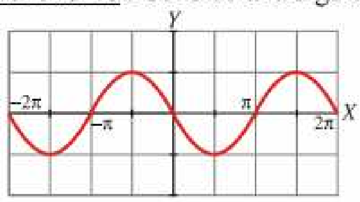
EJERCICIO 45 : Una cierta población crece de acuerdo con la ecuación $y = 1 + k.\, e^{at}$ donde t es el tiempo en meses e y es el número de individuos en miles.

a) Calcula k y a sabiendo que $y(0) = 1{,}2$ y que $y(10) = 1 + 0{,}2e \approx 1{,}54$

b) Representa la función obtenida con los valores de k y a que has hallado.

- **Funciones trigonométricas**

EJERCICIO 46 : Considera la siguiente gráfica:

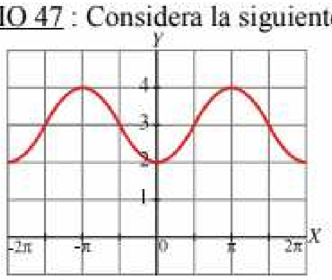


a) Di cuál de estas expresiones analíticas le corresponde:

$y = \cos(x + \pi)$ $y = \text{sen}(x + \pi)$ $y = \cos 2x$ $y = \text{sen}\, 2x$

b) Di cuál es su dominio de definición, cuál es su periodo y qué valores mínimo y máximo alcanza.

EJERCICIO 47 : Considera la siguiente gráfica y responde:



a) ¿Cuál de estas es su expresión analítica?

$y = 3 - \text{sen}\, x$ $y = 3 - \cos x$

$y = 3 + \cos x$ $y = 3 + \text{sen}\, x$

b) ¿Cuál es su dominio de definición?

c) ¿Es una función continua?

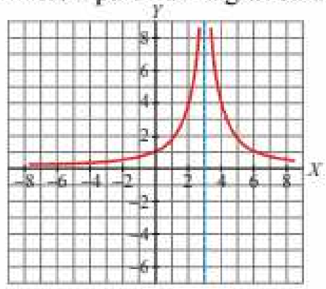
d) ¿Es periódica? ¿Cuál es su periodo?

e) ¿Qué valores mínimo y máximo alcanza?

TEMA 7: LÍMITES, CONTINUIDAD Y RAMAS INFINITAS

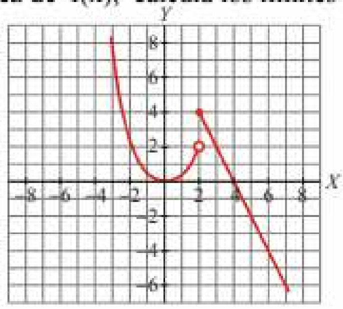
Cálculo de límites sobre la gráfica

EJERCICIO 1 : Calcula los siguientes límites a partir de la gráfica de f(x):



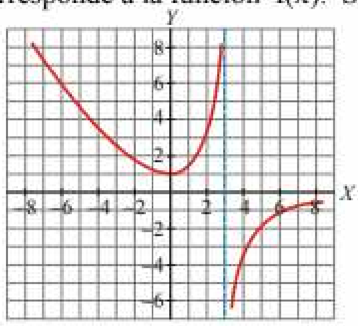
a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ c) $\lim_{x\to3^-} f(x)$ d) $\lim_{x\to3^+} f(x)$ e) $\lim_{x\to0} f(x)$

EJERCICIO 2 : Dada la siguiente gráfica de f(x), calcula los límites que se indican:



a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ c) $\lim_{x\to2^-} f(x)$ d) $\lim_{x\to2^+} f(x)$ e) $\lim_{x\to0} f(x)$

EJERCICIO 3 : La siguiente gráfica corresponde a la función f(x). Sobre ella, calcula los límites:



a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ c) $\lim_{x\to3^-} f(x)$ d) $\lim_{x\to3^+} f(x)$ e) $\lim_{x\to0} f(x)$

Cálculo de límites inmediatos

EJERCICIO 4 : Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to-1} \frac{4}{x^2+2x+3}$ b) $\lim_{x\to2} \sqrt{x^2-9}$ c) $\lim_{x\to\pi/2} \cos x$ d) $\lim_{x\to1} \frac{x-3}{x^2+x+1}$

e) $\lim_{x\to2} \sqrt{6-3x}$ f) $\lim_{x\to1} \log x$ g) $\lim_{x\to2} \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{4}\right)$ h) $\lim_{x\to-2} 3^{x+1}$

i) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x$ j) $\lim_{x\to-2} (3-x)^2$ k) $\lim_{x\to-8} \left(1+\sqrt{-2x}\right)$ l) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x$

Cálculo de límites e interpretación geométrica

EJERCICIO 5 : Calcula los siguientes límites e interpreta geométricamente el resultado.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+1}{(2-x)^3}$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-x^3}{x^2-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{5+3x}$ 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{5+3x}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(1-x)^3}$ 6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3-x^3}{x^2}$ 7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2-x}$ 8) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+1}$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{4-x^2}$ 10) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-1}{2x-6}$ 11) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x^2+1}$ 12) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+5}{x+3}$

13) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ 14) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-2x+3x^3\right)$ 15) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+3x}{x^2-1}$ 16) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{2}-x^2\right)$

17) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4}{1+x^2}$ 18) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ 19) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x^2-4}$ 20) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^4-3x}{x^4+1}$

EJERCICIO 6 : Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-3x}-x\right)$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+2x+1}}{2x+7}$ d) $\lim\limits_{x\to 4} \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{\frac{2}{x-4}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x^2-1}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+1}$ g) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x+2}{2x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$ h) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3+2x^2-4x-8}{x^3+x^2-4x-4}$

i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^3-x^2-x+1}$ j) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{x-2}$ k) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+4}{(x+1)^2}$ l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2-3x+7}-2x$

EJERCICIO 7 : Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3x^2-24x+48}{x-4}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^{x+c}$ d) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{x^2-x-12}$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-4x}{x^2-3x+2}$ g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+5x-1}{x^3+x}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+1}{x+3}$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-3}{x^3-1}$ j) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-5}{\sqrt{x+4}-3}$ k) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{2x+3}\right)^{2x}$ l) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{x}{2}}$

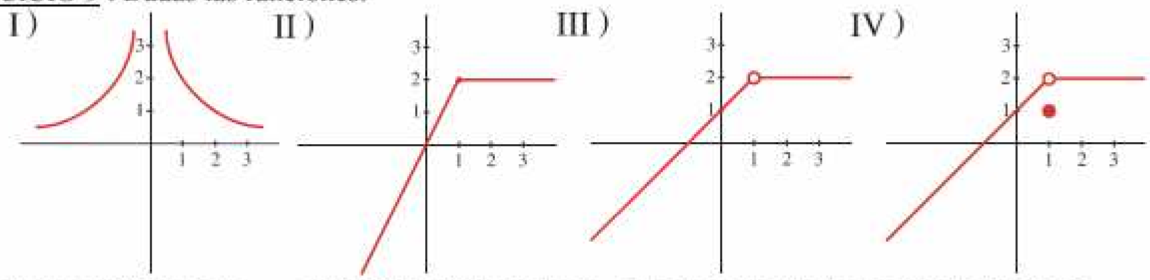
m) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x}-x$ n) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-3x^2+9x-27}{x^2-9}$

EJERCICIO 8 : Calcula el límite cuando $x \to 3$ de cada una de las siguientes funciones y representa los resultados obtenidos en cada caso:

a) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x$ b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$ c) $f(x)=\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$

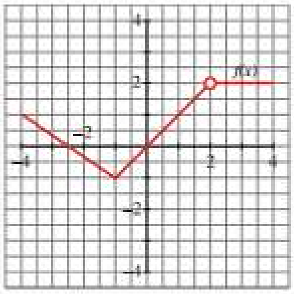
Estudio de la continuidad a partir de una gráfica

EJERCICIO 9 : Dadas las funciones:



a) Di si son continuas o no. b) Halla la imagen de $x = 1$ para cada una de las cuatro funciones.

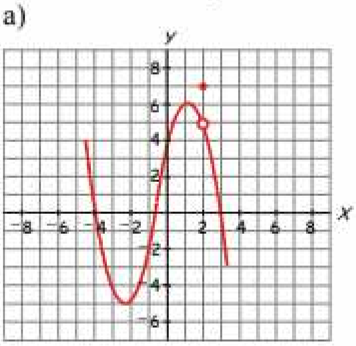
EJERCICIO 10 : Dada la gráfica:



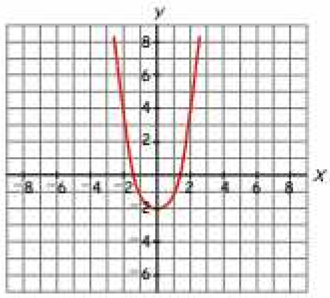
a) Di si $f(x)$ es continua o no. Razona tu respuesta. b) Halla $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$ y $f(3)$.

EJERCICIO 11 : ¿Son continuas las siguientes funciones en $x = 2$?

a)

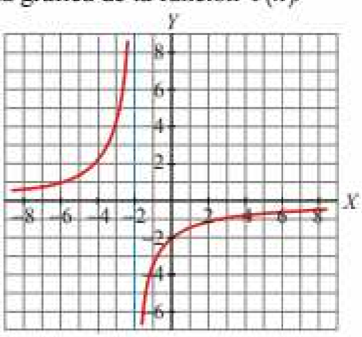


b)



Si alguna de ellas no lo es, indica la razón de la discontinuidad.

EJERCICIO 12 : Esta es la gráfica de la función $f(x)$:



a) ¿Es continua en $x = -2$?
b) ¿Y en $x = 0$?
Si no es continua en alguno de los puntos, indica la causa de la discontinuidad.

Estudio de la continuidad a partir de su expresión analítica

EJERCICIO 13 : Averiguar los puntos e intervalos de discontinuidad de las siguientes funciones:

a) $y=\sqrt{\dfrac{x+5}{x^2-5x+6}}$ b) $y=\dfrac{x+5}{x^2-5x+6}$ c) $y=\sqrt{x^2-5x+6}$

EJERCICIO 14 : Estudia la continuidad de las funciones siguientes y represéntalas gráficamente:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{3} & \text{si } x\le 4\\ x^2-15 & \text{si } x>4\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}x^2-2x & \text{si } 0<x\le 1\\ 3x-1 & \text{si } x>1\end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x<1\\ \dfrac{3x-1}{2} & \text{si } x>1\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}x^2-3 & \text{si } x\le 2\\ 1 & \text{si } x>2\end{cases}$ e) $f(x)=\begin{cases}2-x^2 & \text{si } x\ne 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$ f) $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x=0\\ 1-x^2 & \text{si } x\ne 0\end{cases}$

EJERCICIO 15 : Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}x+3 & \text{si } -6\le x<-2\\ 1 & \text{si } -2<x\le 1\\ 2x+1 & \text{si } 1<x<3\\ -2x+13 & \text{si } 3\le x<5\\ 3 & \text{si } x>5\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si } x<0\\ x^2+x & \text{si } 0\le x<1\\ 2 & \text{si } x>1\end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x+2} & \text{si } x<0\\ \dfrac{3}{x+3} & \text{si } x>0\end{cases}$

EJERCICIO 16 : Hallar $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ siendo

$f(x)=\begin{cases}3-x & \text{si } x\ge 2\\ 0 & \text{si } x<2\end{cases}$

a) ¿ Existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$?

b) Estudia su continuidad en el punto $x = 2$

EJERCICIO 17 : Halla el valor de k para que $f(x)$ sea continua en $x=1$:

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x\ne 1\\ k & \text{si } x=1\end{cases}$$

EJERCICIO 18 : Halla el valor de m para que $f(x)=\begin{cases}3x^2+mx-1 & \text{si } x\le 1\\ 2x+3 & \text{si } x>1\end{cases}$ sea continua en todo R.

Asíntotas y ramas infinitas

EJERCICIO 19 :Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas:

a) $f(x)=\dfrac{1}{4-x^2}$ b) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-x-2}$ c) $f(x)=\dfrac{2x^2}{(x+2)^2}$ d) $f(x)=\dfrac{-x^3+x}{2}$

e) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x+3}$ f) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$ g) $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{2x+1}$ h) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x+1}$

i) $f(x)=\dfrac{x^4+2x}{x^2+1}$ j) $f(x)=\dfrac{1-3x}{2-x}$ k) $f(x)=\dfrac{1+x^2}{x^3}$ l) $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$

m) $f(x)=\dfrac{4x^2-3}{x}$ n) $f(x)=x^2-x$

Límites: Resolución de indeterminaciones

1a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$ 1b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

2a) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 4}{x^3 + 8}$ 2b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 4}{x^3 + 8}$

3a) $\lim_{x \to 0} \frac{x^4 + 5x^3 - x^2}{3x^4 - 7x^2 + x}$ 3b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 + 5x^3 - x^2}{3x^4 - 7x^2 + x}$

4a) $\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - x - 2}}$ 4b) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - x - 2}}$

5a) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{x^2 + 4}}{x}$ 5b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1 - \sqrt{x^2 + 4}}{x}$

6a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{3x - 2}}$ 6b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{3x - 2}}$

7a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{5 - \sqrt{x + 25}}$ 7b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{5 - \sqrt{x + 25}}$

8a) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 3} \right)^{\frac{x^4}{x^2 - 4}}$ 8b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 3} \right)^{\frac{x^4}{x^2 - 4}}$

9a) $\lim_{x \to -3} \left(\frac{x^2 - 5}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x^2}{x + 4}}$ 9b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 5}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x^2}{x + 4}}$

10a) $\lim_{x \to 5} \left(\frac{x + 10}{x^2 - 10} \right)^{\frac{x + 2}{2x - 10}}$ 10b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x + 10}{x^2 - 10} \right)^{\frac{x + 2}{2x - 10}}$

ASÍNTOTAS Y RAMAS INFINITAS – Cálculo y representación

1. $y = x^3 - 2x - 1$
2. $y = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$
3. $y = \frac{x + 1}{x^2 + x}$
4. $y = \frac{2x^2 + 1}{x + 1}$
5. $y = \frac{x^4 + 1}{x^2}$

TEMA 8: CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES

Tasa de variación media. Cálculo y significado

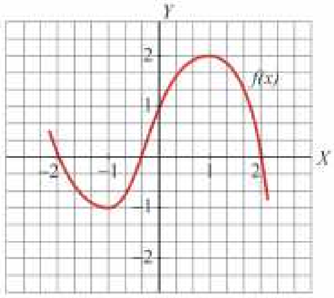
EJERCICIO 1 : Consideramos la función: $f(x)=\frac{x^2-1}{2}$. Halla la tasa de variación media en el intervalo $[0, 2]$ e indica si $f(x)$ crece o decrece en ese intervalo.

EJERCICIO 2 :

a) Calcula la tasa de variación media de la función $f(x)=\frac{3}{x}$ en el intervalo $[-3,-1]$

b) A la vista del resultado obtenido en el apartado anterior, ¿crece o decrece la función en dicho intervalo?

EJERCICIO 3 : Calcula la tasa de variación media de esta función, $f(x)$, en los intervalos siguientes e indica si la función crece o decrece en cada uno de dichos intervalos: a) $[-2, -1]$ b) $[0, 1]$



Derivada de una función por la definición

EJERCICIO 4 : Halla, utilizando la definición, la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 2x$ b) $f(x) = x^2 + 1$ c) $f(x)=\frac{2x+1}{4}$. d) $f(x)=\frac{3}{x}$.

EJERCICIO 5 : Halla la derivada de la siguientes funciones, aplicando la definición de derivada, en los puntos que se indican

a) $f(x)=\frac{3x+1}{2}$. en $x = -1$ b) $f(x)=\frac{1}{x}$ en $x = 2$ c) $f(x) = 3x^2 + 2x$ en $x = 1$ d) $f(x)=\frac{x^2}{3}$. en $x = 1$

Cálculo de derivadas

EJERCICIO 6 : Calcular las siguientes derivadas:

1) $y = 5$
2) $y = x$
3) $y = 3x$
4) $y = x^5$
5) $y = 3.x^6$
6) $y = \frac{3}{5}.x^{10}$
7) $y = \frac{3x^2}{4}$
8) $y = 2x^4-3x^3+x^2-7$
9) $y = \frac{1}{x^4}$
10) $y = 5.\left(\frac{1}{x^3}+x^{-2}\right)$
11) $y = 6x^3 + 5x^2 - 1$
12) $y = \frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3-8x$
13) $y = \frac{1}{x^2}+x^{-3}+2.x^{-1}$
14) $y = 2.\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)$
15) $y = \frac{1}{x^5}-\frac{1}{x^3}$
16) $y = \frac{x^3}{3}+x-\frac{1}{x}$
17) $y = (x^2 - 1).(x^3 + 3x)$
18) $y = (x^2 -1)/(x^3 + 3x)$
19) $y = \frac{x^2-1}{x+4}$
20) $y = \frac{1}{x}$
21) $y = \frac{x^2-x+3}{5}$
22) $y=x^2-\frac{1}{x^3}+\frac{3x}{1+x}+\frac{4-x}{x}$
23) $y = (x^3 + 1).(x + 2)$
24) $y = (x^3 + 2).x^{-2}$
25) $y = \frac{2}{x^3+2}$
26) $y = \frac{x^3-3}{5}$
27) $y = \frac{2}{3x^2+1}$

28) $y = \dfrac{1}{1-3x^3}$

29) $y = \dfrac{x^2-2}{x^3+3x^2}$

30) $y = \dfrac{x^3}{x-3}$

31) $y = (3x^3 - 2x + 7)^7$

32) $y = 3.(x^2 - x + 1)^3$

33) $y = (2x^4 - 4x^2 - 3)^5$

34) $y = (2x^3 + x)^4$

35) $y = 5.(x^3 - 3x)^4$

36) $y = \dfrac{(x^4-5x)^2}{(x^3-3x)^5}$

37) $y = (x^3 - 2x)^3.(2x^4 - x^2)^2$

38) $y = \dfrac{(x^3-2x)^3}{(2x^4-x^2)^2}$

39) $y = \sqrt[3]{x}$

40) $y = \dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$

41) $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

42) $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{3}}$

43) $y = \sqrt[3]{x^2-1}$

44) $y = \sqrt[5]{x^3-7x}$

45) $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}}$

46) $y = 5x^3 + \sqrt[3]{x} + 1$

47) $y = x^2.\sqrt[3]{x}$

48) $y = (x - \sqrt{1-x^2}\ )^2$

49) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x}}$

50) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

51) $y = 5.(x^3 - 2x^2 + x)^4$

52) $y = \dfrac{4-6x}{(2x^4-3)^6}$

53) $y = e^{\sqrt{x}}$

54) $y = \dfrac{1}{e^{2x}}$

55) $y = x^2.e^{3x}$

56) $y = \dfrac{x}{e^x}$

57) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

58) $y = \dfrac{x^2 - x}{e^x}$

59) $y = \log_3 x$

60) $y = \log_2 x^3$

61) $y = \log x$

62) $y = \text{Ln}\,(x^2 - 1)$

63) $y = \log_2 \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$

64) $y = \text{Ln}\, \dfrac{e^{3x}}{\sqrt{x}}$

65) $y = \log \sqrt{\dfrac{x}{1-x^2}}$

66) $y = \dfrac{\text{Ln}x}{x^5}$

67) $y = \text{Ln}\,[x^3.(x+2)]$

68) $y = \text{Ln}\,\sqrt[3]{1+x^2}$

69) $y = \text{Ln}\,\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

70) $y = \text{Ln}\,\dfrac{x^2+3}{2x-1}$

71) $y = (\log x + 1).\sqrt{x^2+1}$

72) $y = \text{tag}\ 2x$

73) $y = \text{sen}\ 2x$

74) $y = \text{sen}\ x^2$

75) $y = \text{sen}^2\ x$

76) $y = \text{sen}^2\ 2x$

77) $y = \text{sen}^2\ x^2$

78) $y = \text{sen}^5\ 2x^3$

79) $y = 5.\ \text{sen}^3\ 2x^4$

80) $y = e^{\cos x}$

81) $y = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$

82) $y = \sqrt{\dfrac{1+\text{sen}\,x}{1-\text{sen}\,x}}$

83) $y = \text{tag}\,(x+3)^2$

84) $y = \text{tag}^2\,(x+3)$

85) $y = \text{Ln}\left(\cos\dfrac{x^2}{2}\right)$

86) $y = \text{tag}\ (1 - 2x)$

87) $y = \text{tag}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

88) $y = \dfrac{\text{cos ecx}}{\sec x}$

89) $y = \text{sen}\ \sqrt{x}$

90) $y = \text{sen}\ (x + e^x)$

91) $y = \text{Ln}\left[\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}\right]$

92) $y = \cos x.\ (1 - \cos x)$

93) $y = \dfrac{\text{sen}\,x + \cos x}{\text{sen}\,x - \cos x}$

94) $y = \text{Ln}\,(x^2.\text{sen}2x)$

95) $y = \dfrac{x.\text{sen}^2 x}{e^x - 1}$

96) $y = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

97) $y = \dfrac{-\cos 2x}{2}$

98) $y = \text{Ln}\,(\text{tag}\ 2x)$

99) $y = \text{Ln}\,(\text{sen}\ x)$

100) $y = \text{sen}^3(x+1)$

101) $y = \sec^2 x$

102) $y = \sqrt{x}\ \text{sen}\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}$

103) $y = \text{sen}\,[\cos(\text{tag}\ x)]$

104) $y = \text{Ln}\sqrt{\dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x}}$

105) $y = \text{Ln}\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

106) $y = \text{Ln}\,(\text{tag}^2\sqrt{x}\ )$

107) $y = \text{Ln}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

108) $y = \text{Ln}\,\dfrac{(x-1)^2}{2x-3}$

109) $y = \text{Ln}\,(\text{sen}^2\ x)$

110) $y = e^{\cos 2x}$

111) $y = \text{Ln}\,(\text{sen}^2x.\cos^3x)$

112) $y = \text{sen}^2x - \cos^2x$

113) $y = \text{sen}(x+1)^3$

EJERCICIO 7 - Halla la función derivada de:

a) $y = 3x^5 - 4x^3 + 3x + 7$ b) $y = \frac{3x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + 5x - 15$ c) $y = \frac{x^2 - 3x + 7}{5}$

d) $y = (3x^3 - 5x + 1).(x + x^2)$ e) $y = \frac{2}{x^2 + 2x}$ f) $y = \frac{x^3}{3x+2}$ g) $y = \left(\frac{3x-2}{7-9x}\right)^2$

h) $y = \frac{(5-x)^2}{3x-1}$ i) $y = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$ j) $y = \sqrt{x^9}.4x^5$ k) $y = \frac{2}{x^5} + \sqrt{3}$

l) $y = \sqrt{12x} + e^{2x+1} + \log_2 3x$ m) $y = (3x - 1)^2.(1 - 4x)$ n) $y = \frac{x^5\sqrt{x}}{x^{-3}(x^2)^5}$ ñ) $y = (3x^3 - 5x + 2)^4$

o) $y = (3x^2 - x)^{-4}$ p) $y = \sqrt{3x^2 - \sqrt{5x}}$ q) $y = \sqrt{1 - x^2}$ r) $y = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^3$

s) $y = (2x - 4)^4 + 2.\sqrt{x^2 - 1}$ t) $y = \sqrt{\frac{x+1}{x^2}}$ u) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x}$ v) $y = \text{Ln}\,(x^2 + 2x) + e^{-x}$

w) $y = \log_3 x + 3^x$ x) $y = 2.\text{sen}(3x+4)$ y) $y = 3\cos^3(3x)$ z) $y = \text{tag}(x^2+1)$

1) $y = \sqrt[5]{x^3 - x}$ 2) $y = x.e^x$ 3) $y = \frac{\text{Ln}x}{\text{sen}x}$ 4) $y = 4.(2x^3-1)^5$

5) $y = e^{\sqrt{x+3}}$ 6) $y = \sqrt[3]{\text{Ln}(3x+5)}$ 7) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 8) $y = \text{tag}\,\sqrt{3x+2}$

Recta tangente

EJERCICIO 8 - Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 2x$ en el punto de abscisa $x = 2$.

EJERCICIO 9 - Halla la ecuación de la recta de pendiente 7 que es tangente a la curva $y = 3x^2 + x - 1$.

EJERCICIO 10 - Halla los puntos de tangente horizontal de la siguiente función y, con ayuda de las ramas infinitas, decide si son máximos o mínimos: $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$

EJERCICIO 11 - Averigua los puntos de tangente horizontal de la función: $f(x) = \frac{3 - x^2}{x + 2}$

EJERCICIO 12 - Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 + 3x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$

EJERCICIO 13 - Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x - 4x^2$ que sea paralela a la recta $y = -7x + 3$

EJERCICIO 14 - Halla la ecuación de la recta de pendiente –4 que sea tangente a la curva $y = x^4 + 2$.

EJERCICIO 15 - Obtén la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^3 + x$ en el punto de abscisa $x = -1$

Crecimiento y extremos relativos

EJERCICIO 16 – Estudia la monotonía y calcula los extremos de la siguiente función: $f(x) = x^4 - 2x^2$

Representar funciones que cumplan unas condiciones

EJERCICIO 17 : Dibuja la gráfica de la función $f(x)$, sabiendo que:

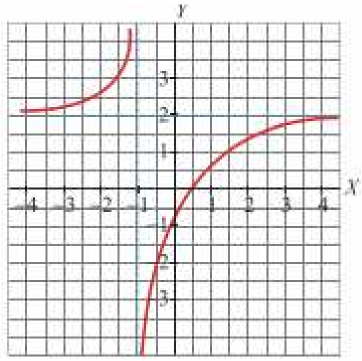
- Su derivada se anula en $(0, 0)$
- Solo corta a los ejes en $(0, 0)$
- Sus asíntotas son x = -2, x = 2 e y = 0
- La posición de la curva respecto a las asíntotas es: $\begin{cases} \text{Si } x \to -\infty, y < 0 \\ \text{Si } x \to +\infty, y < 0 \end{cases}$
- $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

EJERCICIO 18 : Haz la gráfica de una función $f(x)$, sabiendo que :

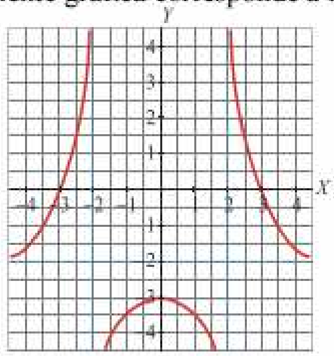
- Es continua.
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- Su derivada se anula en $(-3, -2)$, en $(0, 2)$ y en $(2, -3)$.
- Corta a los ejes en los puntos $(-4, 0)$, $(-2, 0)$, $(1, 0)$, $(3, 0)$ y $(0, 2)$.

Dada una gráfica, estudiar sus condiciones:

EJERCICIO 19: A partir de la gráfica de f (x), di cuáles son sus asíntotas, indica la posición de la curva respecto a ellas y halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función:



EJERCICIO 20 : La siguiente gráfica corresponde a la función f (x):



a) ¿En qué puntos se anula la derivada?   b) ¿Cuáles son sus asíntotas?

c) Indica la posición de la curva respecto a sus asíntotas verticales.

Estudiar y representar funciones

EJERCICIO 21 : Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^3-12x$ b) $f(x)=x^3-4x^2+4x$ c) $f(x)=x^4+2x^2+1$ d) $f(x)=\frac{x+3}{x-1}$

e) $f(x)=\frac{3x}{x-3}$ f) $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$ g) $f(x)=\frac{x^3-2}{x}$ h) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$

i) $f(x)=\frac{2x^2}{x^2-4}$ j) $f(x)=\frac{2x^3}{x^2+2}$ k) $f(x)=\frac{x^4-4}{x^2-1}$ l) $f(x)=\frac{x^4-2x^2+1}{x^2}$

m) $f(x)=\frac{2x^5}{x^2+1}$

Recopilación

EJERCICIO 22 :

a) Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2 - 3x$ en el punto de abscisa $x = -1$

b) ¿Es creciente o decreciente $f(x)$ en $x=2$?

EJERCICIO 23 : Dada la función: $f(x)=4x^2-2x+1$

a) ¿Es creciente o decreciente en $x = 0$? ¿Y en $x = 1$?

b) Halla los tramos en los que la función crece y en los que decrece.

EJERCICIO 24 :

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=2x-3x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$.

b) Halla los tramos en los que $f(x)$ es creciente y en los que es decreciente.

EJERCICIO 25 : Consideramos la función: $f(x)=5x^2-3x$

a) ¿Crece o decrece en $x=-1$? ¿Y en $x = 1$?

b) Halla los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

EJERCICIO 26 : Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las funciones:

a) $f(x)=8x-x^2$ b) $f(x)=\frac{x^2-3x}{4}$

EJERCICIO 27 : Dada la siguiente función: $f(x)=14x-7x^2$

a) ¿Es creciente o decreciente en $x = 0$? ¿Y en $x = 4$?

b) Halla los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

EJERCICIO 28 : Halla y representa gráficamente los puntos de tangente horizontal de la función:

$$f(x)=x^3-x^2-8x+12$$

EJERCICIO 29 : Averigua los puntos de tangente horizontal de las siguiente función y represéntalos gráficamente:
$f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$

EJERCICIO 30 : Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x-1)^2(x+8)$ b) $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ d) $f(x) = 4x^2 - 2x^4 + 2$

e) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x$ f) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$ g) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$ h) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 2x}$

i) $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 2}{x^2 + 2x - 3}$ j) $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2}$ k) $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$ l) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$

m) $f(x) = x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}$ n) $f(x) = x(x-3)^2$ ñ) $f(x) = x^4 - 8x^2$ o) $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 12}{x+4}$

p) $f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$ q) $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$ r) $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4x}$ s) $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$